第５講　ベクトル

1　平面上に，1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD と，その外側に三角形 OAB があり，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ とする。$0<t<1$ とし，線分 OA，AD，CB を $t:(1-t)$ に内分する点をそれぞれ P，Q，R とする。以下では，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおく。

(1)　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=$ **ア** により，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}$ である。また，$\vec{a}+\vec{b}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ は平行であり，$|\vec{a}+\vec{b}|=$ **エ** により，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}(\vec{a}+\vec{b})$ である。

次に，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ を t と $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\frac{\boxed{キ}-t}{\boxed{ク}}\vec{a}+\frac{t}{\boxed{ク}}\vec{b} \quad\cdots\cdots\cdots①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\frac{1-\boxed{ケ}\,t}{\boxed{ク}}\vec{a}+\frac{\boxed{コ}-t}{\boxed{ク}}\vec{b} \quad\cdots\cdots\cdots②$$

である。

（次ページに続く）

(2)　$0<t<1$ の範囲において，三角形 PQR の面積 S の最小値を求めよう。

点 P から線分 CD に引いた垂線と線分 QR の交点を T とする。三角形 PTQ と三角形 PTR の面積の和は S に等しいから，$S=\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}\mathrm{PT}$ である。これにより，PT が最小になるときを考えればよいことがわかる。

まず，QT : TR $=(1-t):\boxed{ス}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PT}}=\boxed{セ}\,\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+\boxed{ソ}\,\overrightarrow{\mathrm{PR}} \quad \cdots\cdots ③$$

である。$\boxed{ス}$，$\boxed{セ}$，$\boxed{ソ}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑦のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪　t　　①　$(1-t)$　　②　$(1+t)$　　③　$(1+2t)$

④　$\dfrac{t}{2}$　　⑤　$\dfrac{1-t}{2}$　　⑥　$\dfrac{1+t}{2}$　　⑦　$\dfrac{1+2t}{2}$

したがって，①，②，③により

$$\overrightarrow{\mathrm{PT}}=\left(\frac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}t^2-\frac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}}t+\frac{3}{4}\right)(\vec{a}+\vec{b})$$

となる。よって，$t=\dfrac{\boxed{ト}}{\boxed{ナ}}$ のとき，PT は最小になり，三角形 PQR の面積 S の最小値は $\dfrac{\boxed{ニヌ}}{\boxed{ネノ}}$ である。

2　座標空間において4点 A(2, 0, 0), B(1, 1, 0), C(1, 0, 1), D(x, y, z) を考える。

(1)　三つのベクトル $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ について

$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=$ **ア** ……………………………①

$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}=$ **イ** ……………………………②

である。**ア**, **イ** に当てはまるものを，次の⓪〜⑧のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

⓪ $x-y-1$　① $y-z-1$　② $z-x-1$

③ $x-y$　④ $y-z$　⑤ $z-x$

⑥ $x-y+1$　⑦ $y-z+1$　⑧ $z-x+1$

(2)　AB＝BC＝CA＝$\sqrt{\boxed{ウ}}$ により，三角形 ABC は正三角形である。以下，4点 A, B, C, D が，正四面体の四つの頂点になるとする。このときの x, y, z の値を求めよう。ただし，$x>1$ とする。

ベクトル $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ の大きさは，いずれも $\sqrt{\boxed{エ}}$ であり，どの二つのベクトルのなす角も **オカ**° である。よって，$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}=$ **キ** となる。このことと①，②および $|\overrightarrow{DA}|=|\overrightarrow{DB}|=|\overrightarrow{DC}|=\sqrt{\boxed{エ}}$ により，

(x, y, z)＝(**ク**, **ケ**, **コ**) となる。

（次ページに続く）

(3)　$(x,\ y,\ z)=($ ク , ケ , コ $)$ のときを考える。線分 AB の中点を P，線分 DA を 1：2 に内分する点を Q，線分 DC を $t:(1-t)$ $(0<t<1)$ に内分する点を R とする。三角形 PQR の面積 S が最小になるときの t の値を求めよう。

$$|\overrightarrow{PQ}|^2=\frac{\fbox{サシ}}{\fbox{スセ}},\quad |\overrightarrow{PR}|^2=\fbox{ソ}\,t^2-\fbox{タ}\,t+\frac{\fbox{チ}}{\fbox{ツ}}$$

であり，$\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{PR}$ のなす角を θ とすると，$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{PR}|\sin\theta$ なので

$$\begin{aligned}4S^2&=|\overrightarrow{PQ}|^2|\overrightarrow{PR}|^2\sin^2\theta\\&=|\overrightarrow{PQ}|^2|\overrightarrow{PR}|^2-|\overrightarrow{PQ}|^2|\overrightarrow{PR}|^2\cos^2\theta\\&=t^2-\frac{\fbox{テ}}{\fbox{ト}}t+\frac{\fbox{ナ}}{\fbox{ニヌ}}\end{aligned}$$

である。よって，S は $t=\frac{\fbox{ネ}}{\fbox{ノハ}}$ のとき最小になる。

第５講　ベクトル

1 (1) $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\overrightarrow{BA}|^2=1^2=1$，つまり $|\vec{a}-\vec{b}|^2=\mathbf{1}$ より，$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=1$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ より，$\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2=1$　　よって，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\mathbf{\dfrac{3}{4}}$

$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OE}$ すると，四角形 OAEB はひし形より，$\overrightarrow{OE}\perp\overrightarrow{AB}$

また，正方形 ABCD より，$\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AB}$　　よって，$\overrightarrow{OE}\,/\!/\,\overrightarrow{AD}$

すなわち，$\vec{a}+\vec{b}\,/\!/\,\overrightarrow{AD}$

また，$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2+2\times\dfrac{3}{4}+\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2=4$ より，$|\vec{a}+\vec{b}|=\mathbf{2}$

これと $|\overrightarrow{AD}|=1$ より，$\overrightarrow{AD}=\mathbf{\dfrac{1}{2}}(\vec{a}+\vec{b})$

$$\overrightarrow{PQ}=(1-t)\vec{a}+t\overrightarrow{AD}=(1-t)\vec{a}+\frac{1}{2}t(\vec{a}+\vec{b})=\mathbf{\frac{2-t}{2}}\vec{a}+\frac{t}{2}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}=\vec{b}+(1-t)\overrightarrow{BC}-t\vec{a}=\vec{b}+(1-t)\times\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})-t\vec{a}$$

$$=\frac{\mathbf{1-3}t}{2}\vec{a}+\frac{\mathbf{3}-t}{2}\vec{b}$$

(2) △PTQ と △PTR において，線分 PT を底辺としたときの高さをそれぞれ h_1，h_2 とすると，

$$S=\triangle PTQ+\triangle PTR=\frac{1}{2}\times PT\times h_1+\frac{1}{2}\times PT\times h_2=\frac{1}{2}\times PT\times(h_1+h_2)=\mathbf{\frac{1}{2}}PT$$

OE と QR の交点を F とすると，QF：FR＝1：1

また，AD∥PT∥OF より，QT：TF＝AP：PO＝$(1-t)$：t

よって，QT：TR＝$(1-t)$：$(1+t)$　（②）

したがって，

$$\overrightarrow{PT}=\frac{1+t}{(1-t)+(1+t)}\overrightarrow{PQ}+\frac{1-t}{(1-t)+(1+t)}\overrightarrow{PR}$$

$$=\frac{1+t}{2}\overrightarrow{PQ}+\frac{1-t}{2}\overrightarrow{PR}\quad(⑥，⑤)$$

$$=\frac{1+t}{2}\left(\frac{2-t}{2}\vec{a}+\frac{t}{2}\vec{b}\right)+\frac{1-t}{2}\left(\frac{1-3t}{2}\vec{a}+\frac{3-t}{2}\vec{b}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}t^2-\frac{3}{4}t+\frac{3}{4}\right)\vec{a}+\left(\frac{1}{2}t^2-\frac{3}{4}t+\frac{3}{4}\right)\vec{b}=\left(\mathbf{\frac{1}{2}}t^2-\mathbf{\frac{3}{4}}t+\frac{3}{4}\right)(\vec{a}+\vec{b})$$

$$|\overrightarrow{PT}|=\left(\frac{1}{2}t^2-\frac{3}{4}t+\frac{3}{4}\right)|\vec{a}+\vec{b}|=\left(\frac{1}{2}t^2-\frac{3}{4}t+\frac{3}{4}\right)\times2=t^2-\frac{3}{2}t+\frac{3}{2}$$

$t^2-\dfrac{3}{2}t+\dfrac{3}{2}=\left(t-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{15}{16}$ より，$t=\mathbf{\dfrac{3}{4}}$ のとき，$|\overrightarrow{PT}|$ すなわち PT は最小値 $\dfrac{15}{16}$

をとり，このとき S は最小値 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{15}{16}=\mathbf{\dfrac{15}{32}}$ をとる．

2 (1) $\overrightarrow{\mathrm{DA}}=(2-x,\ -y,\ -z)$，$\overrightarrow{\mathrm{DB}}=(1-x,\ 1-y,\ -z)$，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}=(1-x,\ -y,\ 1-z)$

より，

$\overrightarrow{\mathrm{DA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DB}}-\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}}=(2-x)(1-x)-(1-x)^2+(-y)(1-y)-(1-y)(-y)+(-z)^2-(-z)(1-z)$

$=z-x+1$　（⑧）　……………①

$\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}}-\overrightarrow{\mathrm{DC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DA}}=(1-x)^2-(1-x)(2-x)+(1-y)(-y)-(-y)^2+(-z)(1-z)-(1-z)(-z)$

$=x-y-1$　（⓪）　……………②

(2) $\mathrm{AB}=\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$，$\mathrm{BC}=\sqrt{0^2+1^2+1^2}=\sqrt{2}$，$\mathrm{CA}=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\boldsymbol{\sqrt{2}}$

4 点 A，B，C，D が正四面体の四つの頂点となるとき，

$|\overrightarrow{\mathrm{DA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{DB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{DC}}|=\boldsymbol{\sqrt{2}}$ であり，

$\overrightarrow{\mathrm{DA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ のどの二つのベクトルのなす角も $\mathbf{60}^\circ$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{DA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DB}}=\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DA}}=\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\cos 60^\circ=\mathbf{1}$

$\overrightarrow{\mathrm{DA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DB}}-\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}}=0$ より，①から，$z-x+1=0$　つまり　$z=x-1$

$\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}}-\overrightarrow{\mathrm{DC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DA}}=0$ より，②から，$x-y-1=0$　つまり　$y=x-1$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{DA}}=(2-x,\ 1-x,\ 1-x)$

$|\overrightarrow{\mathrm{DA}}|=\sqrt{2}$ より，$(2-x)^2+(1-x)^2+(1-x)^2=(\sqrt{2})^2$　　$3x^2-8x+4=0$

したがって，$x=2\,(>1)$ より，$(x,\ y,\ z)=(\mathbf{2},\ \mathbf{1},\ \mathbf{1})$

(3) $(x,\ y,\ z)=(2,\ 1,\ 1)$ のとき，題意の点 P，Q，R について

$$\mathrm{P}\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right),\ \mathrm{Q}\left(2,\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right),\ \mathrm{R}(2-t,\ 1-t,\ 1)$$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{6},\ \frac{2}{3}\right)=\frac{1}{6}(3,\ 1,\ 4)$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=\frac{1}{6^2}(3^2+1^2+4^2)=\frac{26}{36}=\boldsymbol{\frac{13}{18}}$

$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\left(\frac{1}{2}-t,\ \frac{1}{2}-t,\ 1\right)$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2=\left(\frac{1}{2}-t\right)^2+\left(\frac{1}{2}-t\right)^2+1^2=\mathbf{2}t^2-\mathbf{2}t+\boldsymbol{\frac{3}{2}}$

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}-3t+\frac{1}{2}-t+4\right)=\frac{1}{6}(6-4t)=1-\frac{2}{3}t$$

よって，$4S^2=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2\cos^2\theta$

$=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}})^2$

$=\frac{13}{18}\left(2t^2-2t+\frac{3}{2}\right)-\left(1-\frac{2}{3}t\right)^2$

$=t^2-\boldsymbol{\frac{1}{9}}t+\boldsymbol{\frac{1}{12}}=\left(t-\frac{1}{18}\right)^2-\frac{1}{18^2}+\frac{1}{12}$

$0<t<1$ より，$4S^2$ は $t=\boldsymbol{\frac{1}{18}}$ のとき最小となり，$S>0$ より S も最小となる．